

## Zagadnienie transportowe

### 1. Charakterystyka zagadnienia transportowego

- $M$  dostawców pewnego jednorodnego towaru, z których każdy dysponuje  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) jednostkami tego towaru, zaopatruje  $N$  odbiorców.
- Zapotrzebowanie każdego z odbiorców wynosi  $B_j$  jednostek ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Każdy z dostawców może zaopatrywać dowolnego odbiorcę i odwrotnie – każdy odbiorca może otrzymać towar od dowolnego dostawcy.
- Dane są ponadto jednostkowe koszty transportu  $c_{ij}$  towaru  $i$ -tego dostawcy do  $j$ -tego odbiorcy. Zakłada się, że całkowity koszt transportu jest sumą kosztu transportu na poszczególnych trasach.
- **Cel:** należy opracować plan przewozu towaru między dostawcami a odbiorcami tak, aby łączne koszty transportu były możliwie najniższe.
- Plan taki ma określić, ile towaru powinien dostarczyć  $i$ -ty dostawca  $j$ -temu odbiorcy.
- Zmienne decyzyjne:  $x_{ij}$  – ilość towaru, jaką  $i$ -ty dostawca powinien dostarczyć  $j$ -temu odbiorcy ( $i = 1, 2, \dots, M$ ;  $j = 1, 2, \dots, N$ ).
- Model zagadnień transportowych ma rozwiązanie, gdy  $\sum_{i=1}^M A_i \geq \sum_{j=1}^N B_j$ ,
- gdzie  $\sum_{i=1}^M A_i$  oznacza łączną podaż dostawców, natomiast  $\sum_{j=1}^N B_j$  – łączne zapotrzebowanie odbiorców.
- Występują dwa rodzaje zagadnienia transportowego:

a) **zamknięte** zagadnienie transportowe (**ZZT**)

$$\text{gdzie } \sum_{i=1}^M A_i = \sum_{j=1}^N B_j ;$$

b) **otwarte** zagadnienie transportowe (**OZT**)

$$\text{gdzie } \sum_{i=1}^M A_i > \sum_{j=1}^N B_j .$$

### 2. Zamknięte zagadnienie transportowe (ZZT)

- **Warunki ograniczające:**

a) dla dostawców: 
$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = A_i \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Oznacza to, że  $i$ -ty dostawca ma rozprzedać pomiędzy odbiorców cały towar, który posiada. Warunków tego typu jest tyle ilu dostawców, czyli  $M$ .

b) dla odbiorców: 
$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = B_j \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Oznacza to, że  $j$ -ty odbiorca ma otrzymać od wszystkich dostawców tyle towaru ile potrzebuje. Warunków tego typu jest tyle ilu odbiorców, czyli  $N$ .

- **Warunki brzegowe:**  $x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N)$

- **Funkcja celu (kryterium):** 
$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Minimalizacja łącznych kosztów transportu – od wszystkich dostawców do wszystkich odbiorców.

#### 2.1. Etapy rozwiązania zagadnienia transportowego:

- Sformułowanie wstępnego planu przewozów – wyznaczenie początkowego rozwiązania dopuszczalnego;
- Poprawa powyższego rozwiązania w kolejnych iteracjach, aż do uzyskania rozwiązania optymalnego.

#### 2.2. Metody uzyskiwania wstępnego rozwiązania dopuszczalnego:

- Metoda kąta północno-zachodniego
- Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów
- Metoda aproksymacji Vogla (VAM)

#### 2.3. Metody poprawy wstępnego rozwiązania dopuszczalnego:

- Iteracyjna metoda potencjałów
- Algorytm Forda-Fulkersona

### 3. Otwarte zagadnienie transportowe (OZT) (zagadnienie transportowo-magazynowe)

**OZT** można sprowadzić do **ZZT** poprzez wprowadzenie fikcyjnego  $N+1$  odbiorcy, którego zapotrzebowanie

$$B_{N+1} \text{ jest równe nadwyżce podaży nad popytem: } B_{N+1} = \sum_{i=1}^M A_i - \sum_{j=1}^N B_j .$$

W rzeczywistości najczęściej zakłada się, że nadwyżka towaru pozostanie w magazynach dostawców.

Mogą być dodatkowo podane jednostkowe koszty magazynowania u poszczególnych dostawców  $(c_{i,N+1})$  lub też zakłada się, że koszty magazynowania są pomijalnie małe w porównaniu z kosztami transportu. W funkcji celu minimalizuje się łączne koszty transportu i magazynowania.

#### 4. Zagadnienie transportowo-produkcyjne (ZT-P)

W ZT-P dostawcami są producenci towaru, a nie magazyny:

- $M$  producentów pewnego jednorodnego towaru, z których każdy ma zdolność produkcyjną  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) jednostek towaru, zaopatruje w swoją produkcję  $N$  odbiorców.
- Każdy odbiorca zgłasza zapotrzebowanie na  $B_j$  jednostek ( $j = 1, 2, \dots, N$ ). Zakłada się, że łączne zdolności produkcyjne zakładów produkcyjnych przekraczają łączne zapotrzebowanie odbiorców.
- Oprócz jednostkowych kosztów transportu od  $i$ -tego producenta do  $j$ -tego odbiorcy, dane są jednostkowe koszty produkcji w  $i$ -tym zakładzie  $p_i$ .

Zadanie ZT-P można sprowadzić do ZZT poprzez:

- wprowadzenie fikcyjnego  $N+1$  odbiorcy, który będzie reprezentować albo **niewykorzystane zdolności produkcyjne** poszczególnych producentów, albo magazyny u producentów, i którego zapotrzebowanie  $B_{N+1}$  jest równe różnicy pomiędzy sumą zdolności produkcyjnych wytwórców i sumą zapotrzebowań odbiorców,

czyli: 
$$B_{N+1} = \sum_{i=1}^M A_i - \sum_{j=1}^N B_j,$$

- skonstruowanie macierzy łącznych kosztów produkcji oraz transportu (i ewentualnie magazynowania)  $k_{ij}$  w następujący sposób:  $k_{ij} = p_i + c_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ;  $j = 1, 2, \dots, N+1$ ),
- przy czym  $k_{i,N+1} = 0$  jeżeli fikcyjny odbiorca reprezentuje niewykorzystane zdolności produkcyjne.

W zadaniu ZT-P zmienne decyzyjne  $x_{ij}$  to ilości towaru wyprodukowane w  $i$ -tym zakładzie, dostarczone do  $j$ -tego odbiorcy, natomiast wielkości  $x_{i,N+1}$  to niewykorzystane zdolności produkcyjne poszczególnych wytwórców lub ilości wyprodukowane, pozostające w magazynach producentów.