Gry dwuosobowe o sumie zero

Przykład 1. Dwaj producenci pewnego wyrobu sprzedają swe wyroby na rynku, którego wielkość jest stała. Aby zwiększyć swój udział w rynku sprzedają swe wyroby na rynku, którego wielkość jest stała. Aby zwiększyć swój udział w rynku (przejąć część klientów konkurencyjnego przedsiębiorstwa), każde z nich może zastosować jedną z trzech strategii marketingowych.

W tablicy podano wzrost udziału w rynku (%) przedsiębiorstwa A (spadek udziału przedsiębiorstwa B) w zależności od podjętych przez przedsiębiorstwa decyzji.

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	3	2	1
A_2	4	1	-3
A_3	5	0	-5

Znaleźć optymalne strategie marketingowe dla obu przedsiębiorstw.

Rozwiązanie. Z założenia o stałości rynku wynika, że zwiększenie w nim udziału przedsiębiorstwa A jest równoznaczne z zmniejszeniem udziału przedsiębiorstwa B. Jeżeli menedżer przedsiębiorstwa A wybierze strategię A2, to udział w rynku tego przedsiębiorstwa wzrośnie o 4%, gdy przeciwnik wybierze B1, wzrośnie o 1% gdy przeciwnik wybierze B2 lub spadnie o 3% gdy przeciwnik wybierze B3.

Menedżer przedsiębiorstwa A dąży do tego, by możliwie maksymalnie zwiększyć swój udział w rynku, menedżer B będzie dążył do minimalizacji straty swego udziału w rynku. Gracze podejmują decyzję równocześnie, niezależnie od siebie, nie wiedząc jaką decyzję podejmie przeciwnik.

Obaj gracze grają ostrożnie, licząc się z najmniej korzystną sytuacją. Gracz A dla każdej swojej strategii określa minimalną wygraną (zakładając, że przeciwnik wybierze najbardziej niekorzystną dla niego strategię).

Gracz A stosuje regułę maxmin, czyli:

$$v_A = \max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\}$$

Gracz B dla każdej swej strategii określa maksymalną przegraną, stosuje regułę minimax, czyli:

$$v_B = \min_j \left\{ \max_i a_{ij} \right\}$$

Poszukiwanie przez graczy optymalnych strategii obrazuje poniższa tabela:

A \ B	B_1	B_2	B_3	**min a_{ij}**	
A_1	3	2	1	<u>**1**</u>	$v_A = \max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\}$
A_2	4	1	-3	-3	
A_3	5	0	-5	-5	
max a_{ij}	5	2	<u>**1**</u>		
			$v_B = \min_j \left\{ \max_i a_{ij} \right\}$		

Jeżeli (jak w tym przypadku) maksymalna z minimalnych wygranych jest równa minimalnej z maksymalnych przegranych, to mówimy, że **istnieje rozwiązanie gry w zbiorze strategii czystych** (gra ma **punkt siodłowy**). W naszym przykładzie punkt siodłowy gry istnieje na przecięciu pierwszego wiersza i trzeciej kolumny (optymalnych strategii graczy).

Punkt siodłowy jest jednocześnie wartością gry v, i wynosi w tej grze 1.

Menedżer przedsiębiorstwa A powinien więc wybrać strategię marketingową A_1 i wtedy bez względu na decyzję przedsiębiorstwa B zwiększy swój udział w rynku co najmniej o 1%. Przedsiębiorstwo B powinno wybrać strategię B_3 i wtedy, bez względu na decyzję menedżera przedsiębiorstwa A, straci nie więcej niż 1% udziału w rynku.

Przykład 2. Macierz wypłat ma poniższą postać. Rozwiązać zadanie przy założeniach z poprzedniego zadania.

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	3	-3	7
A_2	-1	4	2
A_3	0	-4	4

Rozwiązanie. Sprawdźmy, czy istnieje dla tej gry punkt siodłowy.

A \ B	B_1	B_2	B_3	**min a_{ij}**	
A_1	3	-3	7	-3	$v_A = \max_i \left\{\min_j a_{ij}\right\}$
A_2	-1	5	2	**<u>-1</u>**	
A_3	0	-4	4	-4	
max a_{ij}	**<u>3</u>**	5	7		
$v_B = \min_j \left\{\max_i a_{ij}\right\}$					

Ponieważ $v_A \neq v_B$ to gra nie ma rozwiązania w zbiorze strategii czystych. Dla każdego gracza należy określić strategie mieszane. **Strategia mieszana** jest kombinacją strategii czystych stosowanych z odpowiednimi prawdopodobieństwami.

Optymalną strategię dla gracza A można zapisać: $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$, a optymalną strategię mieszaną dla gracza B jako: $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$. Gdzie p_i, q_i to prawdopodobieństwa zastosowania przez graczy odpowiednich strategii.

Przed przystąpieniem do wyznaczania strategii mieszanych należy (o ile to możliwe) zredukować macierz wypłat (zmniejszyć jej rozmiary) przez wykreślenie tzw. **strategii zdominowanych** (strategii jawnie niekorzystnych dla każdego z graczy).

Porównajmy najpierw trzy strategie gracza A. Jak łatwo zauważyć strategia A_3 daje w każdym przypadku strategie niższe niż A_1. Gracz A nie powinien nigdy stosować strategii A_3 (jest to strategia zdominowana przez A_1).

W przypadku gracza B, strategia B_3 daje zawsze większe przegrane niż B_1. Gracz B nie będzie więc używał strategii B_3 (jest to strategia zdominowana przez B_1). Po wykreśleniu strategii zdominowanych otrzymujemy nową macierz gry:

A \ B	B_1	B_2	B_3	**min a_{ij}**
A_1	3	-3	~~7~~	-3
A_2	-1	5	~~2~~	**<u>-1</u>**
~~A_3~~	~~0~~	~~-4~~	~~4~~	~~-4~~
max a_{ij}	**<u>3</u>**	5	~~7~~	

Każdy z graczy powinien stosować zatem tylko dwie strategie: gracz A strategię A_1 z prawdopodobieństwem p1, A_2 z prawdopodobieństwem p_2, gracz B strategie B_1 z prawdopodobieństwem q_1, B_2 z prawdopodobieństwem q_2.

Wygrana gracza A w przypadku, gdy gracz B będzie stosował strategię B_1, wyniesie: $v_A = 3p_1 - p_2$.

Natomiast, gdy gracz B będzie stosował strategię B_2: $v_A = -3p_1 + 5p_2$.

Ponadto $p_1 + p_2 = 1$.

Stąd:

$$3p_1 - p_2 = -3p_1 + 5p_2$$

$$3p_1 - (1 - p_1) = -3p_1 + 5(1 - p_1)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest: $p_1 = \frac{1}{2}$, zatem $p_2 = \frac{1}{2}$.

Wstawiając obie wartości do $v_A = -3p_1 + 5p_2 = 3p_1 - p_2$ otrzymujemy $v_A = 1$.

Optymalną strategię dla gracza A możemy więc zapisać jako: $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Podobnie dla gracza B otrzymujemy :

$v_B = 3q_1 - 3q_2$ oraz : $v_B = -q_1 + 5q_2$.

Stąd:

$$3q_1 - 3q_2 = -q_1 + 5q_2$$

$$3q_1 - 3(1 - q_1) = -q_1 + 5(1 - q_1)$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest: $q_1 = \frac{2}{3}$, zatem $q_2 = \frac{1}{3}$. Zatem podstawiając otrzymujemy: $v_B = \frac{1}{3}$.

Optymalną strategię gracza B możemy zapisać jako: $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.